Вестник Донского государственного технического университета. 2018. Т. 18, № 3. С. 258–264. ISSN 1992-5980 eISSN 1992-6006
Vestnik of Don State Technical University. 2018. Vol. 18, no. 3, pp. 258–264. ISSN 1992-5980 eISSN 1992-6006

МЕХАНИКА
MECHANICS

УДК 531 https://doi.org/10.23947/1992-5980-2018-18-3-258-264

Обобщенный метод скаляризации динамических упругих полей в трансверсально-изотропных средах и его новые применения*

И. П. Мирошниченко[1], В. П. Сизов[2]**
[1]Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация
[2]Ростовский-на-Дону научно-исследовательский институт радиосвязи, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

General scalarization method of dynamic elastic fields in transversally isotropic media and its new applications***

I. P. Miroshnichenko[1], V. P. Sizov[2]**
[1] Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation
[2] Rostov Scientific Research Institute for Radiocommunication, Rostov-on-Don, Russian Federation

Введение. При исследовании тензорных упругих полей перемещений, напряжений и деформаций в слоистых конструкциях из различных материалов, включая трансверсально-изотропные композиты, успешно применяется эффективный метод скаляризации тензорных полей. Данные поля могут быть выражены через скалярные потенциалы, соответствующие квазипродольным, квазипоперечным и чисто поперечным волнам. Такая скаляризация возможна, если рассматриваемые объекты являются тензорами относительно подгруппы общих преобразований координат, когда локальный аффинный базис имеет один инвариантный вектор, который совпадает с осью материальной симметрии материала. При этом в известных работах рассматриваются конструкции, где этот вектор совпадает с нормалью к границе между слоями. Однако, для практики представляют интерес и другие случаи взаимного расположения оси материальной симметрии материала и границы между слоями.

Целью является дальнейшее развитие применения метода скаляризации в граничных задачах динамической теории упругости на случаи произвольного расположения оси материальной симметрии по отношению к границе между слоями.

Методы исследования. Предлагаемый научно-методический аппарат разработан на основе использования обобщенного метода скаляризации динамических упругих полей перемещений, напряжений и деформаций в трансверсально-изотропных средах.

Результаты исследования. Получены новые расчетные соотношения для определения полей перемещений, напряжений и деформаций в трансверсально-изотропных средах на случаи произвольного расположения осей

Introduction. An efficient technique of tensor field scalarization is successfully used while investigating tensor elastic fields of displacements, stresses and deformations in the layered structures of different materials, including transversally isotropic composites. These fields can be expressed through the scalar potentials corresponding to the quasi-longitudinal, quasi-transverse, and transverse-only waves. Such scalarization is possible if the objects under consideration are tensors relating to the subgroup of general coordinate conversions, when the local affine basis has one invariant vector that coincides with the material symmetry axis of the material. At this, the known papers consider structures where this vector coincides with the normal to the boundary between layers. However, other cases of the mutual arrangement of the material symmetry axis of the material and the boundaries between layers are of interest on the practical side.

Materials and Methods. The work objective is further development of the scalarization method application in the boundary value problems of the dynamic elasticity theory for the cases of an arbitrary arrangement of the material symmetry axis relative to the boundary between layers. The present research and methodological apparatus are developed through the general technique of scalarization of the dynamic elastic fields of displacements, stresses and strains in the transversally isotropic media.

Research Results. New design ratios for the determination of the displacement fields, stresses and deformations in the transversally isotropic media are obtained for the cases of an arbitrary arrangement of the material symmetry axes of the layer

* Работа выполнена в рамках Госзадания Минобрнауки РФ № 9.9770.2017/БЧ и при частичной поддержке гранта РФФИ № 16-08-00740.
** E-mail: ipmir@rambler.ru
*** The research is done within the frame of government task of RF Ministry of Education and Science no. 9.9770.2017/ БЧ and is supported in part by RFFI grant no. 16-08-00740.

материальной симметрии материалов слоев по отношению к границам между слоями.
Обсуждение и заключения. Предлагаемый научно-методический аппарат успешно использован при определении напряженно-деформированного состояния в слоистых конструкциях, выполненных из трансверсально-изотропных материалов, и при анализе результатов диагностики состояния плоскослоистых и слоистых цилиндрических конструкций, находящихся в эксплуатации.

materials with respect to the boundaries between layers.
Discussion and Conclusions. The present research and methodological apparatus are successfully used in determining the stress-strain state in the layered structures of transversally isotropic materials, and in analyzing the diagnosis results of the state of the plane-layered and layered cylindrical structures under operation.

Ключевые слова: метод скаляризации, трансверсально-изотропная среда, акустические волны, композиционные материалы.

Keywords: scalarization method, transversally isotropic medium, acoustic waves, composite materials.

Образец для цитирования: Мирошниченко, И. П. Обобщенный метод скаляризации динамических упругих полей в трансверсально-изотропных средах и его новые применения / И. П. Мирошниченко, В. П. Сизов // Вестник Донского гос. техн. ун-та. — 2018. — Т.18, №3. — С. 258−264. https://doi.org/10.23947/1992-5980-2018-18-3-258-264

For citation: I.P. Miroshnichenko, V.P. Sizov. General scalarization method of dynamic elastic fields in transversally isotropic media and its new applications. Vestnik of DSTU, 2018, vol. 18, no.3, pp. 258−264. https://doi.org/10.23947/1992-5980-2018-18-3-258-264

Введение. При исследовании тензорных упругих полей перемещений, напряжений и деформаций в слоистых конструкциях из различных материалов, включая трансверсально-изотропные композиты [1–3], успешно применяется эффективный метод скаляризации тензорных полей, предложенный в [4], когда отмеченные поля могут быть выражены через скалярные потенциалы, соответствующие квазипродольным, квазипоперечным и чисто поперечным волнам соответственно.

Такая скаляризация возможна, если рассматриваемые объекты являются тензорами относительно подгруппы общих преобразований координат, когда локальный аффинный базис имеет один инвариантный вектор, который совпадает с осью материальной симметрии материала. В [5] рассматриваются конструкции, где этот вектор совпадает с нормалью к границе между слоями. Однако для практики представляют интерес и другие случаи взаимного расположения оси материальной симметрии материала и границы между слоями.

Цель исследования. Целью работы является дальнейшее развитие применения метода скаляризации в граничных задачах динамической теории упругости на случаи произвольного расположения оси материальной симметрии по отношению к границе между слоями.

Постановка задачи. Первоначально в системе координат с допустимым репером находятся компоненты тензоров перемещений и напряжений относительно этого репера. Затем, зная все компоненты тензорных полей в данной системе координат, можно путем перехода к системе координат, связанной с границей между слоями найти нормальные и касательные компоненты перемещений и напряжений, соответствующие площадке, лежащей на границе. Эти компоненты далее используются для удовлетворения граничным условиям задачи [5].

Более подробно изложим вышесказанное на примере решения задач для плоскослоистых конструкций.

Рассмотрим случай, когда главная ось симметрии трансверсально-изотропного материала составляет угол α по отношению к нормали поверхности плоской границы между слоями (рис. 1). При этом считаем, что поле не зависит от координаты $\bar{y}$.

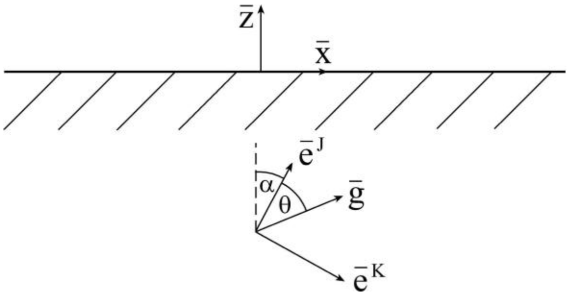


Рис. 1. Расчетная схема

Расчетные соотношения

В соответствии с [4]:

$$U_i=\left(\overset{(L)}{D}_1\nabla_i+\delta_i^J\overset{(L)}{D}_2\nabla_J\right)\phi+\left(\overset{(T)}{D}_1\frac{1}{\overset{(T)}{g}}\nabla_i\nabla_J+\overset{(T)}{g}\delta_i^J\right)w+\sqrt{g}(\delta_i^K\nabla^N-\delta_i^N\nabla^K)v;$$

$$\begin{gathered}\sigma_{ij}=(\overset{(L)}{d}_1 g_{ij}+\overset{(L)}{d}_2\delta_i^J\delta_j^J+\overset{(L)}{d}_3\delta_{(i}^J\nabla_{j)}\nabla_J+\overset{(L)}{d}_4\nabla_i\nabla_j)\phi+\\+(\overset{(T)}{d}_1 g_{ij}\nabla_J+\overset{(T)}{d}_2\delta_i^J\delta_j^J\nabla_J+\overset{(T)}{d}_3\delta_{(i}^J\nabla_{j)}+\overset{(T)}{d}_4\nabla_i\nabla_J\nabla_j)w+\\+2\sqrt{g}[a_2(\nabla_{(i}\delta_{j)}^K\nabla^N-\nabla_{(i}\delta_{j)}^N\nabla^K)+a_4(\delta_{(i}^J\delta_{j)}^K\nabla^N-\delta_{(i}^J\delta_{j)}^N\nabla^K)\nabla_J]v.\end{gathered}\tag{1}$$

Компоненты тензорных полей перемещений U_i и напряжений σ_{ij} в системе координат, связанной с анизотропией материала x^J, x^K, могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{gathered}U_J=i\overset{(L)}{\xi}(\overset{(L)}{D}_1+\overset{(L)}{D}_2)\phi+(-\overset{(T)}{D}_1\frac{\overset{(T)}{\xi}{}^2}{\overset{(T)}{g}}+\overset{(T)}{g})w;\\U_K=i\overset{(L)}{\beta}\overset{(L)}{D}_1\phi-\overset{(T)}{D}_1\frac{\overset{(T)}{\xi}\overset{(T)}{\beta}}{\overset{(T)}{g}}w;\\\sigma_{JJ}=[\overset{(L)}{d}_1+\overset{(L)}{d}_2-(\overset{(L)}{d}_3+\overset{(L)}{d}_4)\overset{(L)}{\xi}{}^2]\phi+i\overset{(T)}{\xi}(\overset{(T)}{d}_1+\overset{(T)}{d}_2+\overset{(T)}{d}_3-\overset{(T)}{d}_4\overset{(T)}{\xi}{}^2)w;\\\sigma_{JK}=-(\frac{1}{2}\overset{(L)}{d}_3\overset{(L)}{\xi}\overset{(L)}{\beta}+\overset{(L)}{d}_4\overset{(L)}{\xi}\overset{(L)}{\beta})\phi+i\overset{(T)}{\beta}(\frac{1}{2}\overset{(T)}{d}_3-\overset{(T)}{d}_4\overset{(T)}{\xi}{}^2)w;\\\sigma_{KK}=(\overset{(L)}{d}_1+\overset{(L)}{d}_4\overset{(L)}{\beta}{}^2)\phi+i\overset{(T)}{\xi}(\overset{(T)}{d}_1-\overset{(T)}{d}_4\overset{(T)}{\beta}{}^2)w.\end{gathered}\tag{2}$$

Здесь потенциалы квазипродольных ϕ и квазипоперечных w волн должны удовлетворять волновому уравнению с соответствующим волновым числом g ($\overset{(L)}{g}$ или $\overset{(T)}{g}$) и имеют вид:

$$\begin{gathered}\phi=\phi_0 e^{i\overset{(L)}{\xi}x^J}e^{i\overset{(L)}{\beta}x^K};\\w=w_0 e^{i\overset{(T)}{\xi}x^J}e^{i\overset{(T)}{\beta}x^K},\end{gathered}\tag{3}$$

где $\xi^2+\beta^2=g^2$;

$$(\Delta+g^2)\begin{matrix}\phi\\w\end{matrix}=0.\tag{4}$$

Входящие в (2) коэффициенты D и d, определены в [5] и имеют вид:

$$\begin{gathered}\overset{(L)}{D}_1=\frac{\overset{(L)}{g}{}^2(C_{13}+C_{44})}{\omega^2\rho-\overset{(L)}{h}{}^2C_{44}-(\overset{(L)}{g}{}^2-\overset{(L)}{h}{}^2)(C_{11}-C_{13}-C_{44})};\\\overset{(L)}{D}_2=\frac{\overset{(L)}{g}{}^2}{\overset{(L)}{h}{}^2}\frac{\omega^2\rho-\overset{(L)}{h}{}^2(2C_{44}+C_{13})-(\overset{(L)}{g}{}^2-\overset{(L)}{h}{}^2)C_{11}}{\omega^2\rho-\overset{(L)}{h}{}^2C_{44}-(\overset{(L)}{g}{}^2-\overset{(L)}{h}{}^2)(C_{11}-C_{13}-C_{44})}=\frac{\overset{(L)}{g}{}^2}{\overset{(L)}{g}{}^2-\overset{(L)}{h}{}^2}\overset{(L)}{D}_1;\\\overset{(T)}{D}_1=\frac{-\overset{(T)}{g}{}^2(C_{13}+C_{44})}{\omega^2\rho-\overset{(T)}{h}{}^2(2C_{44}+C_{13})-(\overset{(T)}{g}{}^2-\overset{(T)}{h}{}^2)C_{11}};\\\overset{(L)}{d}_1=-\overset{(L)}{g}{}^2a_1-\overset{(L)}{h}{}^2a_3(\overset{(L)}{D}_1+\overset{(L)}{D}_2);\qquad\overset{(L)}{d}_2=-\overset{(L)}{g}{}^2a_3-\overset{(L)}{h}{}^2(2a_4\overset{(L)}{D}_2+a_5\overset{(L)}{D}_2+a_5\overset{(L)}{D}_1);\\\overset{(L)}{d}_3=2a_2\overset{(L)}{D}_2+2a_4(2\overset{(L)}{D}_1+\overset{(L)}{D}_2);\qquad\overset{(L)}{d}_4=2a_2\overset{(L)}{D}_1;\\\overset{(T)}{d}_1=a_1\overset{(T)}{g}(1-\overset{(T)}{D}_1)+a_3\left(\overset{(T)}{g}-\frac{\overset{(T)}{h}{}^2}{\overset{(T)}{g}}\overset{(T)}{D}_1\right);\end{gathered}\tag{5}$$

$$\overset{(T)}{d}_2 = a_3 \overset{(T)}{g}(1-\overset{(T)}{D}_1) + 2a_4\overset{(T)}{g} + a_5\left(\overset{(T)}{g} - \frac{\overset{(T)}{h}{}^2}{\overset{(T)}{g}}\overset{(T)}{D}_1\right);$$

$$\overset{(T)}{d}_3 = 2a_2\overset{(T)}{g} + 2a_4\left(\overset{(T)}{g} - 2\overset{(T)}{D}_1\frac{\overset{(T)}{h}{}^2}{\overset{(T)}{g}}\right); \overset{(T)}{d}_4 = 2a_2\overset{(T)}{D}_1\frac{1}{\overset{(T)}{g}}; \qquad (6)$$

$$a_1 = C_{11} - 2a_2; \quad a_2 = \frac{1}{2}\left(C_{11}-C_{12}\right); \quad a_3 = -\frac{1}{2}\left(C_{11}+C_{12}\right) + C_{13} + C_{44} - a_4;$$

$$a_4 = -\frac{1}{2}\left(C_{11}-C_{12}\right) + C_{44}; a_5 = C_{11} + C_{33} - 2(C_{13} + 2C_{44}), \qquad (7)$$

где C_{ij} — модули упругости материала, записанные по свернутому индексу [6–7].

В формулах (5) и (6) для этих коэффициентов:

$$h = \frac{\cos\theta}{\cos(\alpha+\theta)}g_z; \quad \beta = \frac{\sin\theta}{\cos(\alpha+\theta)}g_z; \quad g = \frac{g_z}{\cos(\alpha+\theta)}.$$

В граничные условия динамических задач теории упругости входят компоненты перемещений $\bar{U}_z$, $\bar{U}_x$ и напряжений $\bar\sigma_{zz}$, $\bar\sigma_{zx}$, записанные в системе координат $\bar z$, $\bar x$, связанной с границей (рис. 1).

Системы координат $\bar z$, $\bar x$ и x^J, x^K связаны между собой соотношениями [8]:

$$\bar z = -x^K\sin\alpha + x^J\cos\alpha; \bar x = x^K\cos\alpha + x^J\sin\alpha \qquad (8)$$

или:

$$x^K = \bar x\cos\alpha - \bar z\sin\alpha; x^J = \bar x\sin\alpha + \bar z\cos\alpha. \qquad (9)$$

Используя соотношения (8) и (9), по формулам [5]:

$$\bar U_i = \frac{\partial x^m}{\partial \bar x^i}U_m; \bar\sigma_{ij} = \frac{\partial x^m}{\partial \bar x^i}\frac{\partial x^p}{\partial \bar x^j}\sigma_{mp}, \qquad (10)$$

где коэффициенты с чертой относятся к системе координат $\bar z$, $\bar x$ (назовем их «новыми» координатами), а без черты к системе координат x^J, x^K («старые» координаты).

Запишем компоненты полей перемещений $\bar U_z$, $\bar U_x$ и напряжений $\bar\sigma_{zz}$, $\bar\sigma_{zx}$, входящих в граничные условия через компоненты (2):

$$\bar U_z = \cos\alpha U_J - \sin\alpha U_K;$$

$$\bar U_x = \sin\alpha U_J + \cos\alpha U_K; \qquad (11)$$

$$\bar\sigma_{zz} = \cos^2\alpha\sigma_{JJ} - \sin 2\alpha\sigma_{JK} + \sin^2\alpha\sigma_{KK};$$

$$\bar\sigma_{zx} = \frac{1}{2}\sin 2\alpha(\sigma_{JJ} - \sigma_{KK}) + (1 - 2\sin^2\alpha)\sigma_{JK}. \qquad (12)$$

В «новых» координатах потенциальные функции (3) имеют вид:

$$\bar\phi = \phi_0 e^{i\overset{(L)}{\xi}(\bar x\sin\alpha + \bar z\cos\alpha)} e^{i\overset{(L)}{\beta}(\bar x\cos\alpha - \bar z\sin\alpha)};$$

$$\bar w = w_0 e^{i\overset{(T)}{\xi}(\bar x\sin\alpha + \bar z\cos\alpha)} e^{i\overset{(T)}{\beta}(\bar x\cos\alpha - \bar z\sin\alpha)},$$

а перемещения (11) запишутся следующим образом:

$$\bar U_z = \cos\alpha[i\overset{(L)}{\xi}(\overset{(L)}{D}_1 + \overset{(L)}{D}_2)\bar\phi + (-\overset{(T)}{D}_1\frac{\overset{(T)}{\xi}{}^2}{\overset{(T)}{g}} + \overset{(T)}{g})\bar w] - \sin\alpha[i\overset{(L)}{\xi}\overset{(L)}{D}_1\bar\phi + (-\overset{(T)}{D}_1\frac{\overset{(T)}{\xi}{}^2}{\overset{(T)}{g}} + \overset{(T)}{g})\bar w] \qquad (13)$$

$$\bar U_x = \sin\alpha[i(\overset{(L)}{D}_1 + \overset{(L)}{D}_2)\bar\phi + (-\overset{(T)}{D}_1\frac{\overset{(T)}{\xi}{}^2}{\overset{(T)}{g}} + \overset{(T)}{g})\bar w] + \cos\alpha[i\overset{(L)}{\beta}\overset{(L)}{D}_1\bar\phi - \overset{(L)}{D}_1\frac{\overset{(T)}{\xi}\overset{(T)}{\beta}}{\overset{(T)}{g}}\bar w] \qquad (14)$$

Здесь волновые числа ξ, β, g определены относительно «старого» репера (рис. 2).

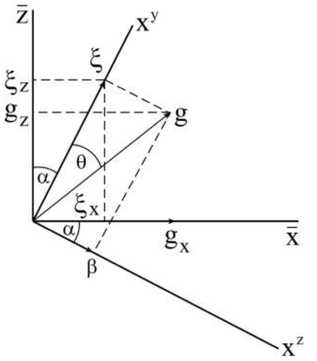


Рис. 2. Схема «взаимосвязи» волновых чисел

Волновые числа ξ, β, которые являются проекциями вектора $\bar{g}$ на «старый» репер x^J, x^K и волновые числа g_x, g_z которые являются проекциями вектора $\bar{g}$ на «новый репер» $\bar{z}$, $\bar{x}$ связаны между собой следующими соотношениями:

$$\xi=\frac{\cos\theta}{\sin(\alpha+\theta)}g_x=\frac{\cos\theta}{\cos(\alpha+\theta)}g_z;\ \ \beta=\frac{\sin\theta}{\sin(\alpha+\theta)}g_x=\frac{\sin\theta}{\cos(\alpha+\theta)}g_z;$$

$$g=\frac{g_x}{\sin(\alpha+\theta)}=\frac{g_z}{\cos(\alpha+\theta)}. \tag{15}$$

Подставляя (15) в (14), получим выражения для перемещений в «новых» координатах:

$$\bar{U}_z=i\overset{(L)}{g}_z(\overset{(L)}{D}_1+\frac{\cos\theta\cos\alpha}{\cos(\alpha+\theta)}\overset{(L)}{D}_2)\bar{\phi}+\overset{(T)}{g}_z(-\cos\theta\overset{(T)}{D}_1+\frac{\cos\alpha}{\cos(\alpha+\theta)})\bar{w};$$

$$\bar{U}_x=i\overset{(L)}{g}_z[\frac{\cos\theta\sin\alpha}{\cos(\alpha+\theta)}(\overset{(L)}{D}_1+\overset{(L)}{D}_2)+\frac{\sin\theta\cos\alpha}{\cos(\alpha+\theta)}\overset{(L)}{D}_1]\bar{\phi}+\overset{(T)}{g}_z[-\frac{\sin(\alpha+\theta)\cos\theta}{\cos(\alpha+\theta)}\overset{(T)}{D}_1+\frac{\sin\alpha}{\cos(\alpha+\theta)}]\bar{w} \tag{16}$$

где, в соответствии с (13) и (15):

$$\bar{\phi}=\phi_0 e^{i\overset{(L)}{g}_x\bar{x}}e^{i\overset{(L)}{g}_z\bar{z}};\ \bar{w}=w_0 e^{i\overset{(T)}{g}_x\bar{x}}e^{i\overset{(T)}{g}_z\bar{z}}. \tag{17}$$

Аналогично, используя (2), (14) и (15), из (12) получим соотношения для компонент напряжений, входящих в граничные условия задач:

$$\bar{\sigma}_{zz}=\{\cos^2\alpha[\overset{(L)}{d}_1+\overset{(L)}{d}_2-(\overset{(L)}{d}_3+\overset{(L)}{d}_4)\frac{\cos^2\theta}{\cos^2(\alpha+\theta)}\overset{(L)}{g}{}_z^2]+\sin 2\alpha(\frac{1}{2}\overset{(L)}{d}_3+\overset{(L)}{d}_4)\frac{\cos\theta\sin\theta}{\cos^2(\alpha+\theta)}\overset{(L)}{g}{}_z^2+\sin^2\alpha(\overset{(L)}{d}_1-\overset{(L)}{d}_4\frac{\sin^2\theta}{\cos^2(\alpha+\theta)}\overset{(L)}{g}{}_z^2)\}\bar{\phi}+$$

$$+\{\cos^2\alpha\frac{\cos\theta}{\cos(\alpha+\theta)}i\overset{(T)}{g}_z(\overset{(T)}{d}_1+\overset{(T)}{d}_2+\overset{(T)}{d}_3-\overset{(T)}{d}_4\frac{\cos^2\theta}{\cos^2(\alpha+\theta)}\overset{(T)}{g}{}_z^2)-\sin 2\alpha\frac{\sin\theta}{\cos(\alpha+\theta)}i\overset{(T)}{g}_z(\frac{1}{2}\overset{(T)}{d}_3-\overset{(T)}{d}_4\frac{\cos^2\theta}{\cos^2(\alpha+\theta)}\overset{(T)}{g}{}_z^2)+$$

$$+\sin 2\alpha\frac{\cos\theta}{\cos(\alpha+\theta)}i\overset{(T)}{g}_z(\overset{(T)}{d}_1-\overset{(T)}{d}_4\frac{\cos^2\theta}{\cos^2(\alpha+\theta)}\overset{(T)}{g}{}_z^2)\}\bar{w};$$

$$\bar{\sigma}_{zx}=\{\frac{1}{2}\sin 2\alpha[\overset{(L)}{d}_2-(\overset{(L)}{d}_3+\overset{(L)}{d}_4)\frac{\cos^2\theta}{\cos^2(\alpha+\theta)}\overset{(L)}{g}{}_z^2+\overset{(L)}{d}_4\frac{\sin^2\theta}{\cos^2(\alpha+\theta)}\overset{(L)}{g}{}_z^2]-(1-2\sin^2\alpha)(\frac{1}{2}\overset{(L)}{d}_3+\overset{(L)}{d}_4\frac{\cos\theta\sin\theta}{\cos^2(\alpha+\theta)}\overset{(L)}{g}{}_z^2\}\bar{\phi}+$$

$$+\{\frac{1}{2}\sin 2\alpha\frac{\cos\theta}{\cos(\alpha+\theta)}i(\overset{(T)}{d}_2+\overset{(T)}{d}_3-\overset{(T)}{d}_4\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2(\alpha+\theta)}\overset{(T)}{g}{}_z^2)+(1-2\sin^2\alpha)\frac{\sin\theta}{\cos(\alpha+\theta)}i(\frac{1}{2}\overset{(T)}{d}_3-\overset{(T)}{d}_4\frac{\cos^2\theta}{\cos^2(\alpha+\theta)}\overset{(T)}{g}{}_z^2)\}\bar{w}; \tag{18}$$

Таким образом, компоненты перемещений и напряжений, входящие в граничные условия (система координат $\bar{z}$, $\bar{x}$ связана с границей), определяются соотношениями (16)–(18), где проекции волнового вектора $\bar{g}$ в системах координат $\bar{z}$, $\bar{x}$ и x^J, x^K связаны соотношениями (15).

Используемые в [5] матрицы C, характеризующие волновые свойства слоев [9–10], и которые являются основными элементами при построении конкретных решений граничных задач в слоистых конструкциях в данном случае, когда оси $\bar{z}$, $\bar{x}$ образуют с компонентами репера $\bar{e}^J$, $\bar{e}^K$ угол α, имеют вид:

$$C = \begin{pmatrix} c_{(1)} & c_{(2)} \\ c_{(3)} & c_{(4)} \end{pmatrix}, \tag{19}$$

где

$$C = \begin{pmatrix} C_{(1)} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} & C_{(2)} = \begin{pmatrix} -c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & -c_{22} \end{pmatrix} \\ C_{(3)} = \begin{pmatrix} c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{pmatrix} & C_{(4)} = \begin{pmatrix} c_{31} & -c_{32} \\ -c_{41} & c_{42} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\overset{(L)}{g}_z z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\overset{(T)}{g}_z z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\overset{(L)}{g}_z z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\overset{(T)}{g}_z z} \end{pmatrix} e^{i g_x x};$$

$$g_x = \overset{(T)}{g}_x = \overset{(L)}{g}_x ; \tag{20}$$

$$C_{11} = i\overset{(L)}{g}_z(\overset{(L)}{D}_1 + \frac{\cos\theta\cos\alpha}{\cos(\alpha+\theta)}\overset{(L)}{D}_2) ;$$

$$C_{12} = \overset{(T)}{g}_z(-\cos\theta\overset{(T)}{D}_1 + \frac{\cos\alpha}{\cos(\alpha+\theta)}) ;$$

$$C_{21} = i\overset{(L)}{g}_z[\frac{\cos\theta\sin\alpha}{\cos(\alpha+\theta)}(\overset{(L)}{D}_1 + \overset{(L)}{D}_2) + \frac{\sin\theta\cos\alpha}{\cos(\alpha+\theta)}\overset{(L)}{D}_1] ;$$

$$C_{22} = \overset{(T)}{g}_z[-\frac{\sin(\alpha+\theta)\cos\theta}{\cos(\alpha+\theta)}\overset{(L)}{D}_1 + \frac{\sin\alpha}{\cos(\alpha+\theta)}] ;$$

$$C_{31} = \cos^2\alpha[\overset{(L)}{d}_1 + \overset{(L)}{d}_2 - (\overset{(L)}{d}_3 + \overset{(L)}{d}_4)\frac{\cos^2\theta}{\cos^2(\alpha+\theta)}\overset{(L)}{g}{}_z^2] + \sin 2\alpha(\frac{1}{2}\overset{(L)}{d}_3 + \overset{(L)}{d}_4)\frac{\cos\theta\sin\theta}{\cos^2(\alpha+\theta)}\overset{(L)}{g}{}_z^2 + + \sin^2\alpha(\overset{(L)}{d}_1 - \overset{(L)}{d}_4\frac{\sin^2\theta}{\cos^2(\alpha+\theta)}\overset{(L)}{g}{}_z^2)$$

$$C_{32} = \cos^2\alpha\frac{\cos\theta}{\cos(\alpha+\theta)}i\overset{(T)}{g}_z(\overset{(T)}{d}_1 + \overset{(T)}{d}_2 + \overset{(T)}{d}_3 - \overset{(T)}{d}_4\frac{\cos^2\theta}{\cos^2(\alpha+\theta)}\overset{(T)}{g}{}_z^2) - \sin 2\alpha\frac{\sin\theta}{\cos(\alpha+\theta)}i\overset{(T)}{g}_z(\frac{1}{2}\overset{(T)}{d}_3 - \overset{(T)}{d}_4\frac{\cos^2\theta}{\cos^2(\alpha+\theta)}\overset{(T)}{g}{}_z^2) +$$
$$+\sin^2\alpha\frac{\cos\theta}{\cos(\alpha+\theta)}i\overset{(T)}{g}_z(\overset{(T)}{d}_1 - \overset{(T)}{d}_4\frac{\sin^2\theta}{\cos^2(\alpha+\theta)}\overset{(T)}{g}{}_z^2) ;$$

$$C_{41} = \frac{1}{2}\sin 2\alpha[\overset{(L)}{d}_2 - (\overset{(L)}{d}_3 + \overset{(L)}{d}_4)\frac{\cos^2\theta}{\cos^2(\alpha+\theta)}\overset{(L)}{g}{}_z^2 + \overset{(L)}{d}_4\frac{\sin^2\theta}{\cos^2(\alpha+\theta)}\overset{(L)}{g}{}_z^2] - (1 - 2\sin^2\alpha)(\frac{1}{2}\overset{(L)}{d}_3 + \overset{(L)}{d}_4\frac{\cos\theta\sin\theta}{\cos^2(\alpha+\theta)}\overset{(L)}{g}{}_z^2 ;$$

$$C_{42} = \frac{1}{2}\sin 2\alpha\frac{\cos\theta}{\cos(\alpha+\theta)}i(\overset{(T)}{d}_2 + \overset{(T)}{d}_3 - \overset{(T)}{d}_4\frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\cos^2(\alpha+\theta)}\overset{(T)}{g}{}_z^2) + (1 - 2\sin^2\alpha)\frac{\sin\theta}{\cos(\alpha+\theta)}i(\frac{1}{2}\overset{(T)}{d}_3 - \overset{(T)}{d}_4\frac{\cos^2\theta}{\cos^2(\alpha+\theta)}\overset{(T)}{g}{}_z^2) . \tag{21}$$

В случае, когда $\alpha = 0$ элементы (21) матрицы C совпадают с соответствующими элементами этой матрицы для случая совпадения нормали к границе и направления оси симметрии материала, которые представлены формулами (3.82) в [5]. Если $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то получается случай, когда ось симметрии материала касательна к поверхности границы и формулы (21) совпадают с выражениями (3.89)–(3.91) в [5].

Зная выражения для матриц C, можно построить решения различных задач, используя научно-методический аппарат, описанный в [5].

Выводы. Предлагаемый научно-методический аппарат успешно использован при определении напряженно-деформированного состояния в слоистых конструкциях, выполненных из трансверсально-изотропных материалов, и при анализе результатов диагностики состояния плоскослоистых и слоистых цилиндрических конструкций, находящихся в эксплуатации.

Библиографический список

1. Тарнопольский, Ю. М. Пространственно-армированные композиционные материалы / Ю. М. Тарнопольский, И. Г. Жигун, В. А. Поляков. — Москва : Машиностроение. — 1987. — 224 с.

2. Справочник по композиционным материалам. Кн.1 / Под ред. Б. Э. Геллера. — Москва : Машиностроение. — 1988. — 448 с.

3. Васильев, В. В. Композиционные материалы. Справочник / В. В. Васильев, В. Д. Протасов, В. В. Болотин и др. — Москва : Машиностроение. — 1990. — 512 с.

4. Сизов, В. П. О скаляризации динамических упругих полей в трансверсально-изотропных средах / В. П. Сизов // Известия РАН. Механика твердого тела. — 1988. — № 5. — С. 55–58.

5. Сизов, В. П. Возбуждение упругих волн в слоистых анизотропных конструкциях. Монография / В. П. Сизов, И. П. Мирошниченко. — Saarbrucken : LAP LAMBERT Academic Publishing. — 2012. — 270 с.

6. Сиротин, Ю. И. Основы кристаллофизики / Ю. И. Сиротин, М. П. Шаскольская. — Москва : Наука. — 1979. — 640 с.

7. Федоров, Ф. И. Теория упругих волн в кристаллах / Ф. И. Федоров. — Москва : Наука. — 1965. — 386 с.

8. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. — Москва : Наука. — 1968. — 720 с.

9. Бреховских, Л. М. Волны в слоистых средах / Л. М. Бреховских. — Москва : АН СССР. — 1957. — 502 с.

10. Виноградова, М. Б. Теория волн / М. Б. Виноградова, О. В. Руденко, А. П. Сухоруков. — Москва : Наука. — 1979. — 384 с.

Поступила в редакцию 18.06 .2018
Сдана в редакцию 19.06.2018
Запланирована в номер 05.07.2018

Received 18.06 .2018
Submitted 19.06.2018
Scheduled in the issue 05.07.2018

Об авторах:

Мирошниченко Игорь Павлович,
заведующий кафедрой «Основы конструирования машин» Донского государственного технического университета (РФ, 344000, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), кандидат технических наук, доцент,
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9450-2500
Ipmir@rambler.ru

Сизов Валерий Павлович,
ведущий научный сотрудник Ростовского-на-Дону научно-исследовательского института радиосвязи (РФ, 344038, г. Ростов-на-Дону, ул. Нансена 130), доктор технических наук, профессор,
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4816-0145

Authors:

Miroshnichenko, Igor P.,
Head of the Machine Design Principles Department, Don State Technical University (1, Gagarin Square, Rostov-on-Don, 344000, RF), Cand.Sci. (Eng.), associate professor,
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9450-2500
Ipmir@rambler.ru

Sizov, Valery P.,
Leading research scholar, Rostov Scientific Research Institute for Radiocommunication (130, Nansena St., Rostov-on-Don, 344038, RF), Dr.Sci. (Eng.), professor,
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4816-0145